Optique – Chapitre 1

# Rappels d'optique – TD

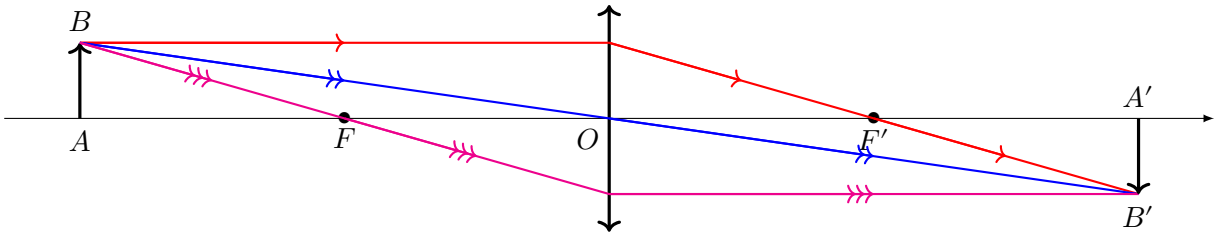
## Exercice 1 : Construction d'images

Un objet $AB$ est situé dans un plan perpendiculaire à l'axe optique d'une lentille de centre $O$. Pour chacun des cas suivants, construire l'image $A'B'$ de cet objet à travers la lentille et décrire les propriétés de cette image :

**1.** la lentille est convergente et $\overline{OA} = 2\,\overline{OF}$ ;
**2.** la lentille est convergente et $\overline{OA} = \overline{OF}$ ;
**3.** la lentille est convergente et $\overline{OA} = \dfrac{1}{2}\,\overline{OF}$ ;
**4.** la lentille est convergente et l'objet situé à l'infini émet des rayons formant un angle $\alpha$ avec l'axe optique ;
**5.** la lentille est convergente et $\overline{OA} = 2\,\overline{OF'}$ ;
**6.** la lentille est divergente et $\overline{OA} = 2\,\overline{OF'}$ ;
**7.** la lentille est divergente et l'objet situé à l'infini émet des rayons formant un angle $\alpha$ avec l'axe optique ;
**8.** la lentille est divergente et $\overline{OA} = \overline{OF}$.

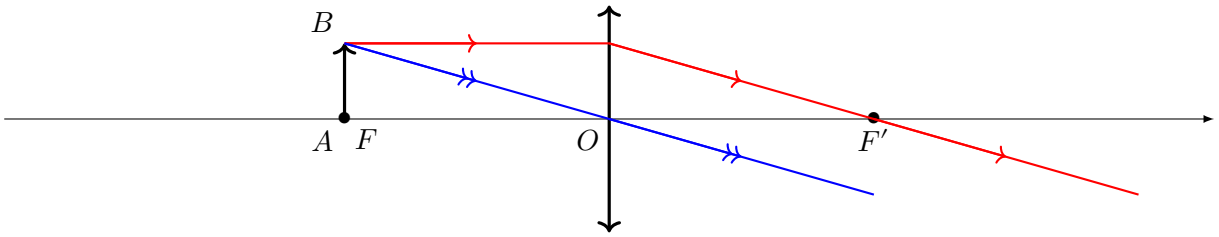
**Correction :**

**1.** Dans le cas où la lentille est convergente et $\overline{OA} = 2\,\overline{OF}$ :



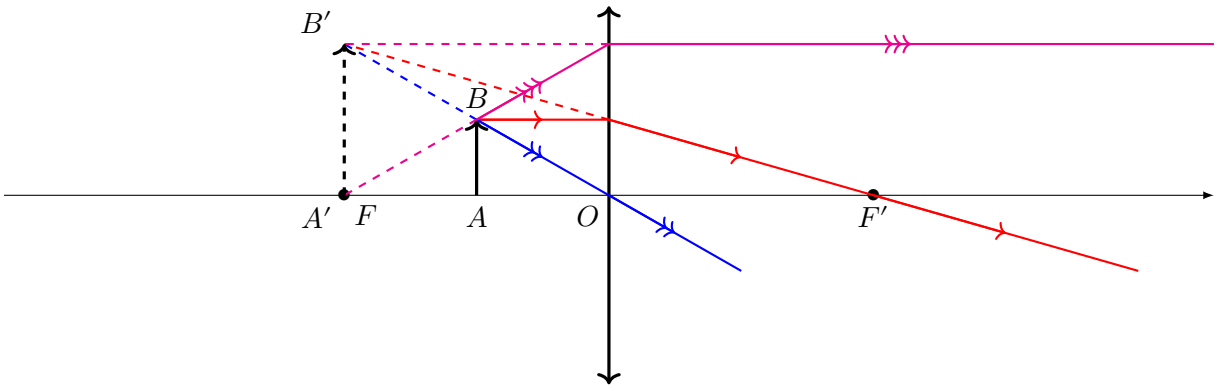

On en conclut que l'image est réelle et renversée.

**2.** Dans le cas où la lentille est convergente et $\overline{OA} = \overline{OF}$ :



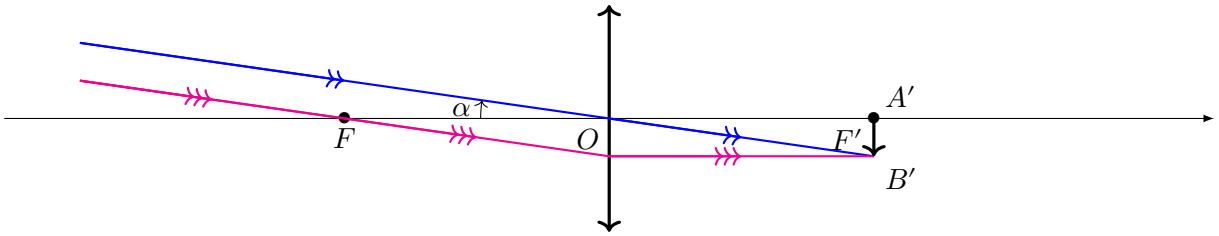

On en conclut que l'image est à l'infini et renversée.

**3.** Dans le cas où la lentille est convergente et $\overline{OA} = \dfrac{1}{2}\,\overline{OF}$ :



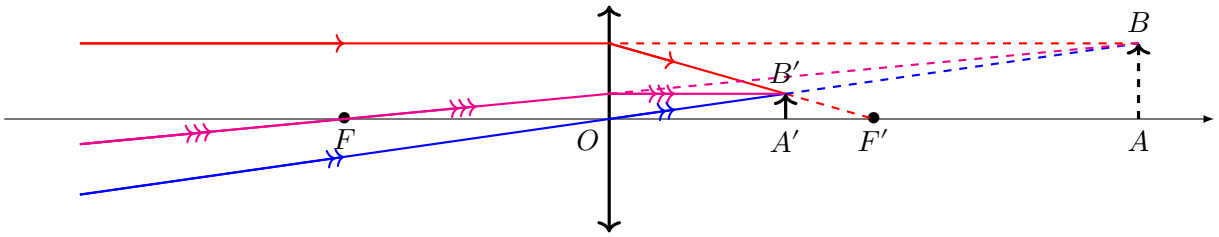

On en conclut que l'image est virtuelle et droite.

**4.** Dans le cas où la lentille est convergente et l'objet situé à l'infini :



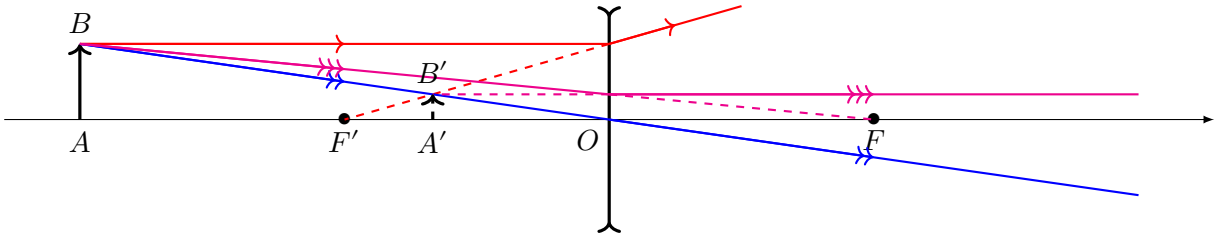

On en conclut que l'image est réelle et renversée.

**5.** Dans le cas où la lentille est convergente et $\overline{OA} = 2\,\overline{OF'}$ :



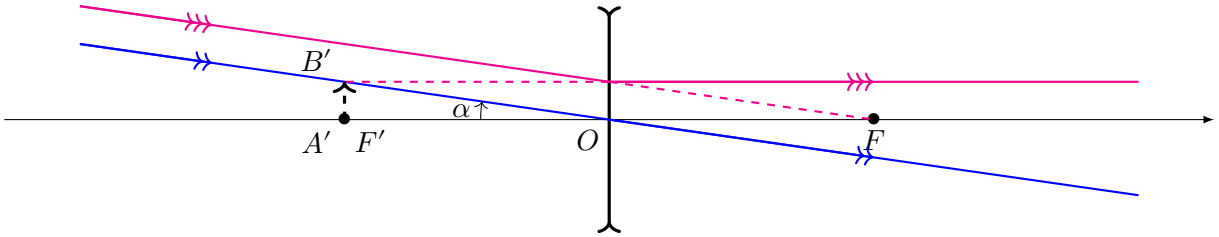

On en conclut que l'image est réelle et droite.

**6.** Dans le cas où la lentille est divergente et $\overline{OA} = 2\,\overline{OF'}$ :



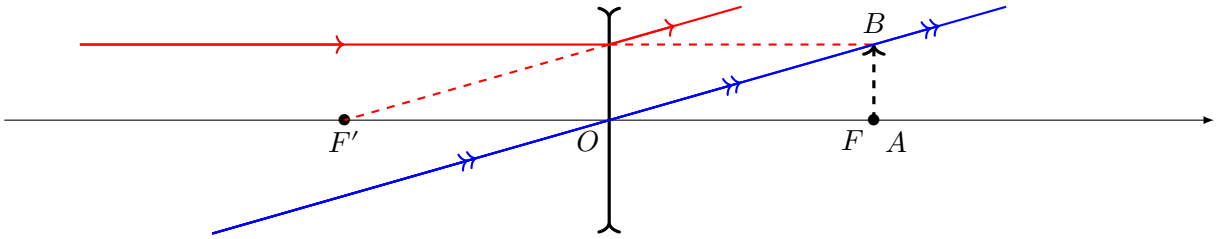

On en conclut que l'image est virtuelle et droite.

**7.** Dans le cas où la lentille est divergente et l'objet situé à l'infini :




On en conclut que l'image est virtuelle et droite.

**8.** Dans le cas où la lentille est divergente et $\overline{OA} = \overline{OF}$ :




On en conclut que l'image est à l'infini et droite.

## Exercice 2 : Grandissement et formule de Newton

On souhaite déterminer la position d'un objet $AB$ par rapport à une lentille qui permet d'obtenir une image avec un grandissement $\gamma = 3$. On rappelle pour cela les formules de Newton du grandissement :

$$\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}.$$

On considère tout d'abord le cas d'une lentille convergente de focale $f' = 30\,\text{cm}$.

**1.** Déterminer la position $\overline{OA}$ qui permet d'obtenir un grandissement $\gamma = 3$ à l'aide d'une formule de Newton.

**2.** En déduire la nature de l'objet.

**3.** Retrouver ces résultats à l'aide d'une construction géométrique.

On considère maintenant le cas d'une lentille divergente de focale $f' = -30\,\text{cm}$.

**4.** Déterminer la position $\overline{OA}$ qui permet d'obtenir un grandissement $\gamma = 3$ à l'aide d'une formule de Newton.

**5.** En déduire la nature de l'objet.

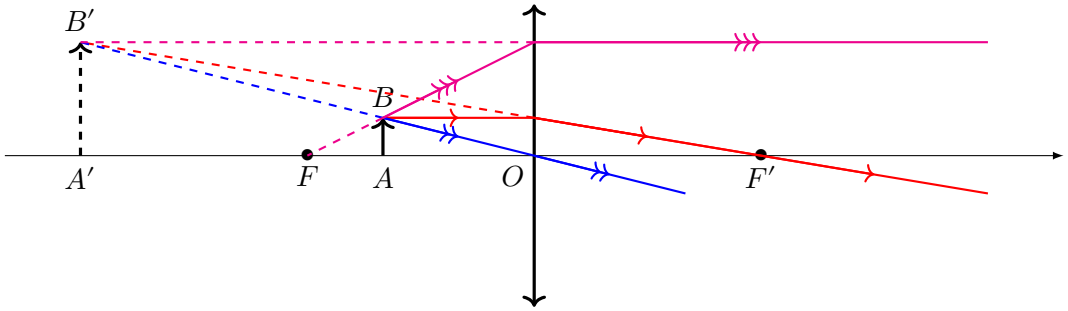
**6.** Retrouver ces résultats à l'aide d'une construction géométrique.

**Correction :**

**1.** On peut exprimer : $\overline{OA} = \overline{OF} + \overline{FA}$, avec $\overline{OF} = -f'$ et $\overline{FA} = \dfrac{f'}{\gamma}$, d'où : $\overline{OA} = f'\left(-1 + \dfrac{1}{\gamma}\right) = -20\,\text{cm}$.

**2.** Comme $\overline{OA} < 0$, on en déduit que l'objet est réel.

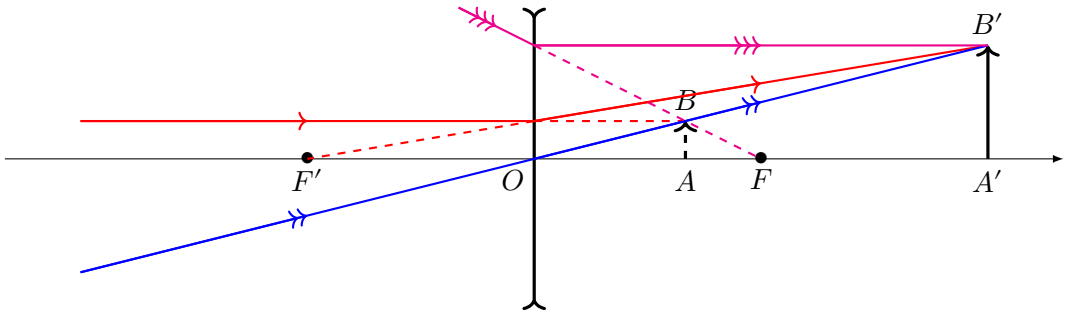
**3.** On réalise la construction géométrique correspondante :




**4.** De façon équivalente, on obtient : $\overline{OA} = f'\left(-1 + \dfrac{1}{\gamma}\right) = 20\,\text{cm}$.

**5.** Comme $\overline{OA} > 0$, on en déduit que l'objet est virtuel.

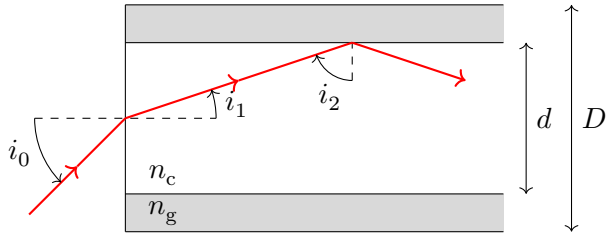
**6.** On réalise la construction géométrique correspondante :




## Exercice 3 : Propagation dans une fibre optique

Une fibre optique permet de guider une onde lumineuse sur de longues distances à l'aide du phénomène de réflexion totale. On considère une fibre horizontale à saut d'indice de longueur $L = 12\,\text{km}$ qui est constituée de deux parties :

- un cœur cylindrique de diamètre $d = 2{,}0\,\text{mm}$ et d'indice optique $n_\text{c} = 1{,}510$ ;
- une gaine cylindrique entourant le cœur de diamètre extérieur $D = 3{,}0\,\text{mm}$ et d'indice optique $n_\text{g} = 1{,}495$.




Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air d'indice optique $n_0 = 1$ pénètre dans la fibre avec un angle d'incidence $i_0$. On rappelle que l'angle d'acceptance $i_{0,\text{lim}}$ est l'angle d'incidence maximal permettant la réflexion totale du rayon à l'interface cœur-gaine.

**1.** Calculer l'angle d'acceptance $i_{0,\text{lim}}$ de cette fibre.

Une impulsion lumineuse sous la forme d'un faisceau conique de demi-angle au sommet $i_{0,\text{lim}}$ est maintenant envoyée dans la fibre.

**2.** Exprimer le temps $\tau_1$ mis par un rayon d'angle d'incidence $i_0 = 0$ pour ressortir de la fibre en fonction de $n_c$, $L$ et $c_0$ la célérité de la lumière dans le vide.

**3.** Exprimer le temps $\tau_2$ mis par un rayon d'angle d'incidence $i_0 = i_{0,\text{lim}}$ pour ressortir de la fibre.

**4.** Calculer l'intervalle de temps $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ correspondant à la réception de l'impulsion lumineuse en sortie de la fibre.

**5.** Sachant que deux impulsions envoyées successivement ne doivent pas se superposer, calculer le nombre maximal d'impulsions qu'il est possible de transmettre en une seconde dans cette fibre.

L'atténuation de la lumière en décibels par kilomètre dans une fibre optique est définie telle que :

$$A_{\text{dB/km}} = \frac{10}{L}\log\left(\frac{\Phi_{\text{entrant}}}{\Phi_{\text{sortant}}}\right)$$

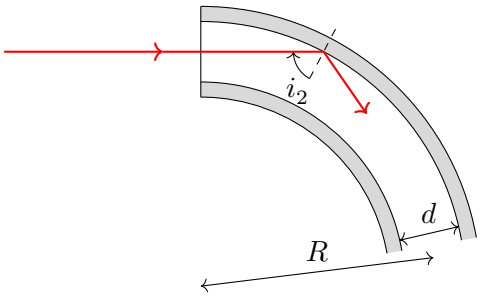
avec $\Phi_{\text{entrant}}$ et $\Phi_{\text{sortant}}$ les flux lumineux entrant et sortant, et $L$ la longueur de la fibre (en km). Cette atténuation dépend notamment de la longueur d'onde $\lambda$ de la lumière envoyée, et on mesure pour cette fibre :

- $A_{\text{dB/km}} = 1{,}2\,\text{dB/km}$ pour $\lambda = 800\,\text{nm}$ ;
- $A_{\text{dB/km}} = 0{,}40\,\text{dB/km}$ pour $\lambda = 1{,}30\,\mu\text{m}$ ;
- $A_{\text{dB/km}} = 0{,}25\,\text{dB/km}$ pour $\lambda = 1{,}55\,\mu\text{m}$.

On estime que le flux sortant de la fibre doit représenter au moins 10% du flux entrant pour transmettre correctement une information.

**6.** Lesquelles de ces trois longueurs d'onde permettent de transmettre correctement une information dans la fibre ?

On suppose maintenant que la fibre optique est courbée de façon uniforme, et on note $R$ son rayon de courbure au centre. Un rayon lumineux se propageant dans l'air pénètre au centre de la fibre en incidence normale.




**7.** Quel est le rayon de courbure limite $R_{\text{lim}}$ de la fibre permettant le phénomène de réflexion totale à l'interface cœur-gaine ?

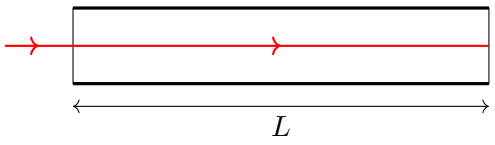
**Correction :**

**1.** À l'interface cœur-gaine, on déduit des lois de Snell-Descartes que le phénomène de réflexion totale disparait pour un angle limite $i_{2,\text{lim}}$ tel que : $n_c \sin i_{2,\text{lim}} = n_g$.

La loi de la réfraction à l'entrée de la fibre donne : $\sin i_{0,\text{lim}} = n_c \sin i_{1,\text{lim}}$, avec $i_{1,\text{lim}} = \dfrac{\pi}{2} - i_{2,\text{lim}}$, soit : $\sin i_{0,\text{lim}} = n_c \sin\left[\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)\right]$.

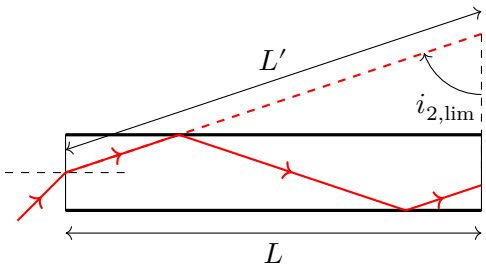
Comme $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$, on peut exprimer : $\sin i_{0,\text{lim}} = n_c\sqrt{1-\left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)^2} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$, d'où : $i_{0,\text{lim}} = \arcsin\left(\sqrt{n_c^2 - n_g^2}\right) = 0{,}21\,\text{rad} = 12°$.

**2.** On schématise le parcours d'un rayon d'angle d'incidence $i_0 = 0$ dans la fibre :




Le rayon parcourt une distance $L$ à la vitesse $c = \dfrac{c_0}{n_c}$, d'où un temps mis pour ressortir de la fibre : $\tau_1 = \dfrac{L}{c} = \dfrac{n_c\, L}{c_0}$.

**3.** On schématise le parcours d'un rayon d'angle d'incidence $i_0 = i_{0,\text{lim}}$ dans la fibre :




Le rayon parcourt une distance $L' = \dfrac{L}{\sin i_{2,\text{lim}}}$ à la vitesse $c = \dfrac{c_0}{n_c}$, avec $\sin i_{2,\text{lim}} = \dfrac{n_g}{n_c}$, d'où un temps mis pour ressortir de la fibre : $\tau_2 = \dfrac{L'}{c} = \dfrac{n_c^2\, L}{c_0\, n_g}$.

**4.** On obtient : $\Delta\tau = \dfrac{n_c\, L}{c_0}\left(\dfrac{n_c}{n_g} - 1\right) = 6{,}1.10^{-7}\,\text{s}$.

**5.** Comme la réception de chaque impulsion nécessite un intervalle de temps $\Delta\tau$, le nombre maximal d'impulsions en une seconde est : $N = \dfrac{1}{\Delta\tau} = 1{,}7.10^{6}\,\text{s}^{-1}$.

**6.** Une information est correctement transmise si $\Phi_{\text{sortant}} > 0{,}10\,\Phi_{\text{entrant}}$, soit : $A_{\text{dB/km}} < \dfrac{10}{L} = 0{,}83\,\text{dB/km}$.
On peut donc utiliser les deux longueurs d'onde infrarouges ($\lambda = 1{,}30\,\mu\text{m}$ et $\lambda = 1{,}55\,\mu\text{m}$), mais pas la longueur d'onde visible ($\lambda = 800\,\text{nm}$).

**7.** Le phénomène de réflexion totale disparait en-dessous d'un angle limite $i_{2,\text{lim}}$ tel que : $n_c \sin i_{2,\text{lim}} = n_g$, où on peut exprimer : $\sin i_{2,\text{lim}} = \dfrac{R_{\text{lim}}}{R_{\text{lim}} + \frac{d}{2}}$, soit : $n_c\, \dfrac{R_{\text{lim}}}{R_{\text{lim}} + \frac{d}{2}} = n_g$, d'où : $R_{\text{lim}} = \dfrac{n_g\, d}{2\,(n_c - n_g)} = 0{,}10\,\text{m}$.

## Exercice 4 : Lunette astronomique

La planète Mars possède un diamètre de 6 800 km. Lorsqu'elle est au plus proche de la Terre, elle se situe à une distance de 56 millions de kilomètres.

**1.** Calculer l'angle $\alpha$ sous lequel est vu la planète Mars lorsqu'elle est au plus proche de la Terre.

**2.** Est-il possible de voir la planète Mars à l'œil nu ?

Une lunette astronomique réelle est un système optique complexe. On peut cependant la modéliser simplement à l'aide de deux lentilles convergentes, comme représenté ci-dessous. La première lentille constitue l'objectif, on note $f'_{\text{ob}}$ sa distance focale et $O_{\text{ob}}$ son centre optique, elle est située du côté de l'objet à observer. La seconde lentille est l'oculaire, on note $f'_{\text{oc}}$ sa distance focale et $O_{\text{oc}}$ son centre optique, elle est située du côté de l'œil.




Il s'agit d'un dispositif afocal, c'est-à-dire qu'un objet à l'infini (tel que la planète Mars) génère une image également à l'infini, ce qui facilite son observation par un œil puisqu'il n'a alors pas besoin d'accommoder.

On souhaite observer la planète Mars à l'aide d'une lunette dont les distances focales sont $f'_{ob} = 100\,\text{cm}$ et $f'_{oc} = 2{,}0\,\text{cm}$.

**3.** Déterminer la distance $\overline{O_{ob}O_{oc}}$ entre les deux lentilles permettant d'obtenir un dispositif afocal.

**4.** Tracer le chemin du rayon qui entre dans la lunette sous un angle $\alpha$, et qui en ressort sous un angle $\alpha'$.

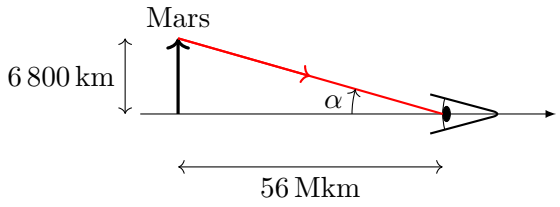
**5.** L'image en sortie de la lunette est-elle droite ou renversée ?

**6.** Déterminer le grossissement $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha}$ de cette lunette.

**7.** Est-il possible d'observer la planète Mars avec son œil derrière la lunette ?

**Correction :**

**1.** On représente l'angle $\alpha$ sous lequel est vu la planète Mars :

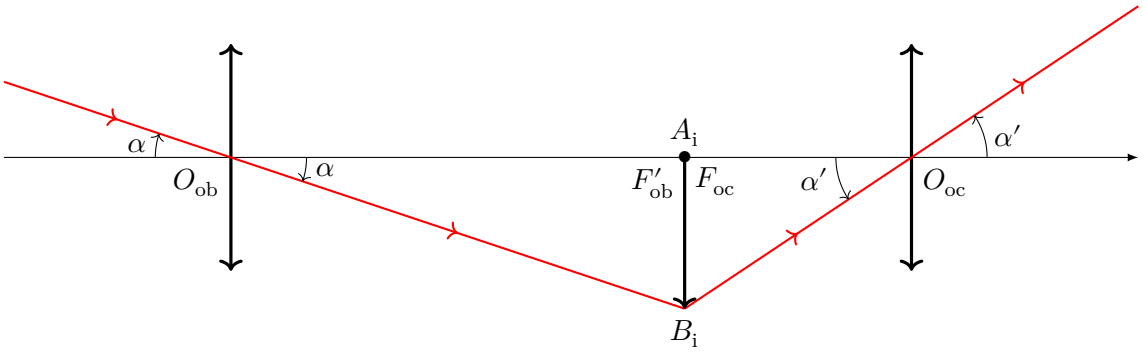



On obtient pour ce petit angle : $\alpha \approx \tan\alpha = \dfrac{6\,800\,\text{km}}{56\,\text{Mkm}} = 1{,}2.10^{-4}\,\text{rad}$.

**2.** Comme la résolution angulaire de l'œil est de $3.10^{-4}\,\text{rad}$, elle est supérieure à l'angle $\alpha$, il n'est donc pas possible de voir la planète Mars à l'œil nu.

**3.** Comme l'objet est à l'infini, son image intermédiaire $A_iB_i$ à travers l'objectif se situe dans le plan focal image de l'objectif, soit : $\overline{O_{ob}A_i} = f'_{ob}$.
L'oculaire renvoie une image en sortie de la lunette qui est à l'infini si l'image intermédiaire se situe dans le plan focal objet de l'oculaire, soit : $\overline{A_iO_{oc}} = f'_{oc}$.
Le dispositif est donc afocal si : $\overline{O_{ob}O_{oc}} = \overline{O_{ob}A_i} + \overline{A_iO_{oc}} = f'_{ob} + f'_{oc} = 102\,\text{cm}$.

**4.** On trace le chemin du rayon qui entre dans la lunette sous un angle $\alpha$ et qui en ressort sous un angle $\alpha'$ :




**5.** L'image en sortie de la lunette est renversée.

**6.** Dans l'approximation des petits angles, on peut exprimer :

- $\alpha \approx \tan\alpha = -\dfrac{A_iB_i}{f'_{ob}}$ (comme $\alpha < 0$) ;
- $\alpha' \approx \tan\alpha' = \dfrac{A_iB_i}{f'_{oc}}$ ;

d'où on en déduit le grossissement : $G = \dfrac{\alpha'}{\alpha} = -\dfrac{f'_{ob}}{f'_{oc}} = -50$.

**7.** Derrière la lunette, la planète Mars est vu sous un angle : $\alpha' = G\,\alpha = -6{,}1.10^{-3}\,\text{rad}$ qui est supérieur à la résolution angulaire de l'œil, il est donc possible d'observer la planète Mars avec son œil.

## Exercice 5 : Déviation des rayons par l'atmosphère

On assimile l'atmosphère terrestre à une superposition de couches d'air horizontales dont l'indice optique varie linéairement de $n_0 = 1$ depuis l'espace jusqu'à $n = 1{,}0003$ à la surface du sol.

Un rayon lumineux provenant d'une étoile lointaine arrive sur l'atmosphère avec un angle d'incidence $i_0$ par rapport à la verticale.

**1.** Exprimer l'angle $i$ sous lequel l'étoile est observée au niveau du sol.

**2.** L'étoile semble-t-elle plus haute ou plus basse sur l'horizon qu'elle ne l'est en réalité ?

**3.** En supposant que la déviation du rayon lumineux est très faible, montrer que celle-ci peut s'exprimer :

$$D = i - i_0 \approx \left(\frac{n_0}{n} - 1\right) \tan i_0.$$

En réalité, l'indice optique $n$ est légèrement plus important pour les rayons de faibles longueurs d'onde que pour ceux de grandes longueurs d'onde.

**4.** En déduire la couleur du dernier rayon lumineux qui est perçu par notre œil lors d'un coucher de Soleil.

**Correction :**

**1.** En appliquant la loi de la réflexion de Snell-Descartes entre chaque couche d'air horizontale d'indice $n_i$ depuis l'espace jusqu'au niveau du sol, on a : $n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = ... = n \sin i$.
On obtient donc : $n_0 \sin i_0 = n \sin i$, d'où : $i = \arcsin\left(\frac{n_0}{n} \sin i_0\right)$.

**2.** Comme $n_0 < n$, on obtient : $i < i_0$, l'étoile est donc vue plus haute sur l'horizon qu'elle ne l'est en réalité.

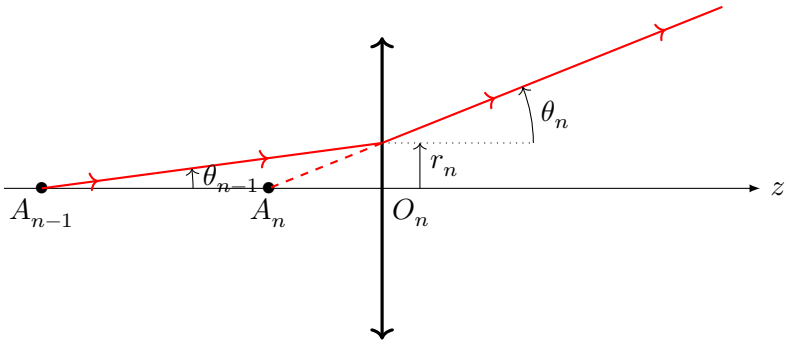
**3.** En exprimant $i = D + i_0$, on obtient : $n_0 \sin i_0 = n \sin i = n \sin(D + i_0) = n(\sin D \cos i_0 + \sin i_0 \cos D)$, avec $\sin D \approx D$ et $\cos D \approx 1$ comme $D$ est très faible, soit : $n_0 \sin i_0 = n(D \cos i_0 + \sin i_0)$, d'où finalement : $D = \left(\frac{n_0}{n} - 1\right) \tan i_0$.

**4.** Lors d'un coucher de Soleil, celui-ci reste est encore visible quelques instants à cause de la déviation des rayons par l'atmosphère.
Si l'indice optique $n$ est plus important pour les rayons de faibles longueurs d'onde, alors la déviation de ces rayons est plus importante (comme $D < 0$). Le dernier rayon lumineux qui est perçu par notre œil est donc un rayon violet.

## Exercice 6 : Suite de lentilles convergentes

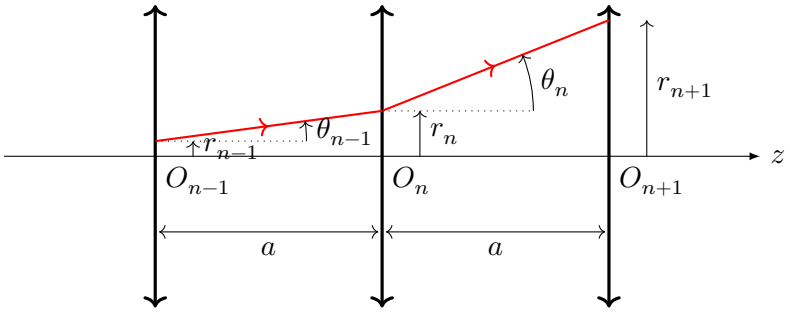
On souhaite déterminer la trajectoire d'un rayon lumineux dans les conditions de Gauss à travers une suite de lentilles convergentes de distance focale $f'$ et espacées d'une distance $a$, avec $a \ll f'$.

On considère d'abord uniquement la lentille de centre optique $O_n$ qui génère une image $A_n$ à partir d'un objet $A_{n-1}$ situé sur l'axe optique. On note $\theta_{n-1}$ l'angle d'un rayon lumineux avant la lentille, $\theta_n$ l'angle du rayon lumineux après la lentille, et $r_n$ la position du rayon lumineux sur la lentille par rapport à l'axe optique, comme représenté ci-dessous.




**1.** À l'aide de la relation de conjugaison de Descartes, établir une relation entre $\theta_{n-1}$, $\theta_n$, $r_n$ et $f'$.

On considère maintenant la suite de lentilles convergentes, comme représenté ci-dessous.




**2.** Établir une relation entre $r_{n-1}$, $r_n$, $r_{n+1}$, $f'$ et $a$.

Comme $a \ll f'$, on peut considérer qu'un rayon lumineux se propageant dans cette suite de lentilles accolées se courbe de façon continue au cours de sa propagation, et on note $r_n = r(z)$ sa position le long de l'axe optique. On peut alors exprimer à l'aide d'un développement au second ordre :

$$\begin{cases} r_{n-1} = r(z-a) \approx r(z) - a\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} + \dfrac{a^2}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} \\ \\ r_{n+1} = r(z+a) \approx r(z) + a\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} + \dfrac{a^2}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} \end{cases}$$

**3.** Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $r(z)$ d'un rayon lumineux.

On suppose qu'un rayon lumineux parcourt cette suite de lentilles depuis la position $r(z=0) = 0$, en s'éloignant au maximum d'une distance $r_0$ par rapport à l'axe optique au cours de sa propagation.

**4.** En déduire l'équation de la trajectoire $r(z)$ de ce rayon lumineux.

**Correction :**

**1.** L'application de la relation de conjugaison de Descartes donne : $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{\overline{O_n A_n}} - \dfrac{1}{\overline{O_n A_{n-1}}}$. Dans les conditions de Gauss, on peut exprimer : $\theta_{n-1} \approx \tan\theta_{n-1} = \dfrac{r_n}{O_n A_{n-1}}$ et $\theta_n \approx \tan\theta_n = \dfrac{r_n}{O_n A_n}$, d'où : $\dfrac{1}{f'} = -\dfrac{\theta_n}{r_n} - \left(-\dfrac{\theta_{n-1}}{r_n}\right)$, soit : $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{\theta_{n-1} - \theta_n}{r_n}$.

**2.** On peut exprimer : $\theta_{n-1} \approx \tan\theta_{n-1} = \dfrac{r_n - r_{n-1}}{a}$ et $\theta_n \approx \tan\theta_n = \dfrac{r_{n+1} - r_n}{a}$, d'où : $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{r_n}\left(\dfrac{r_n - r_{n-1}}{a} - \dfrac{r_{n+1} - r_n}{a}\right) = \dfrac{2\,r_n - r_{n-1} - r_{n+1}}{a\,r_n}$.

**3.** Le développement donne : $\dfrac{1}{f'} = \dfrac{1}{a\,r(z)}\left(2\,r(z) - r(z) + a\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} - \dfrac{a^2}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} - r(z) - a\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z} - \dfrac{a^2}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2}\right)$, et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique : $\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}z^2} + \dfrac{r(z)}{a\,f'} = 0$.

**4.** La solution de l'équation différentielle est de la forme : $r(z) = A\cos\left(\dfrac{z}{\sqrt{a\,f'}}\right) + B\sin\left(\dfrac{z}{\sqrt{a\,f'}}\right)$.

La position initiale du rayon lumineux impose : $r(z=0) = 0 = A$, d'où : $r(z) = B\sin\left(\dfrac{z}{\sqrt{a\,f'}}\right)$. L'amplitude des oscillations le long de l'axe optique au cours de sa propagation est telle que : $B = r_0$, d'où finalement : $r(z) = r_0\sin\left(\dfrac{z}{\sqrt{a\,f'}}\right)$.